משפט הינדמן - תוצאה קומבינטורית עם הוכחה טופולוגית

**1 הקדמה**

בקומבינטוריקה נבחן את השאלה הבאה: בהינתן גרף G בעל n קודקודים, כאשר הקשתות של הגרף צבועות בשני צבעים, האם קיימת צביעה של הגרף כך שכל תת גרף תהיה צבועה בשני צבעים. או האם קיימת צביעה כך שלכל תת גרף של G לא קיימת תת גרף שקשתותיו צבועות בצבע יחיד?

להמחשת השאלה נדגים:

בהינתן שישה אנשים, שכל 2 אנשים הם זרים או חברים, אזי 3 אנשים לפחות הם זרים או חברים.  
על מנת להראות זאת נשתמש בגרף, כאשר כל איש הוא קודקוד בגרף וחברות או זרות לאדם אחר היא קשת צבועה, נוכל להגיד כחול חברות ואדום זה זרות. באופן ישיר נוכל להתחיל מאדם כלשהוא(1) ונניח בשלילה כי לא קיים שלישיה שהם חברים כולם או זרים כולם*. לכל אחד יש לפחות 3 זרים או חברים אז ללא הגבלת כלליות נוכל להגיד שיש לו 3 חברים(2,3,6), והיות והנחנו כי אין שלישיה שכולה חברים או זרים הרי שבין כל זוג בחברים של הראשון חייב להיות זרות(2ו3 3 ו6) – אחרת נקבל שלישיה של חברים. מכאן אנחנו נשארים עם הקשר בין שני חברים המקוריים של הראשון (2,6) מצד אחד אם ניתן להם חברות יווצר לנו שלישיה(1,2,6) של חברים בניגוד להנחה, ואם ניתן להם זרות הרי שיווצר לנו שלישיה (2,3,6) של זרים.*

?

4

3

2

1



6

5

6

5

4

3

2

1

6

5

4

2

3



1

אפשר להכליל את השאלה של מקרה זה ליותר צמתים וכן ליותר צבעים, תורה שחוקרת את עניין זה הינה תורה הנקראת תורת רמזי, ובפרט רמזי הוכיח כי לכלn קיים גרף שלם שניתן לצבוע אותו בכל מספר סופי של צבעים כך שקיים לו תת גרף בגודל n כך ש הגרף הוא גרף שלם וכל קשתותיו צבועות באותו צבע. בנוסף הוכח גם כי בגרף שלם אינסופי קיים תת גרף אינסופי שלם שכל קשתותיו צבועות בצבע יחיד.

נוכל להכליל שאלה זו באופן יותר כללי בהינתן קבוצה כל שהיא אם נחלק אותה לתת קבוצות סופיות האם תמיד אחת הקבוצות שומרת על איזה שהוא כלל, לדוג' באלגברה – אנחנו מכירים את החלוקות מודולו p, והרי ידוע כי התת קבוצות שהם מודולו p הם הרי סגורות לפעולת החיבור, למשל כל מספר המתחלק ב3 אם נחבר עם מספר המתחלק ב3 הרי נקבל מספר המתחלק ב3. אזי ניתן לשאול האם קיימת חלוקה שבורחת מסוג סגירות כזו.

הרי ששאלה זו דומה לשאלה הקודמת כי הרי נוכל במקום ל"צבוע" קשתות נצבע את המספרים, וחזרנו שוב האם יש תמיד תת קבוצה השומרת על כלל כלשהוא כך שהיא צבועה באותו צבע.

להוכחת דבר זה הינדמן הוכיח כי תמיד מתקיים חלוקה כך שקיים תמיד תת קבוצה הצבועה באותו צבע המקיימת כלל כל שהוא במקרה שלו הוא השתמש בתכונת סגירות לחיבור עבור כל תת קבוצה של מספרים טבעיים. הוכחה זו הוא משתמש בכלי טופולוגי בניגוד לרמזי שבא מעולם הקומבינטוריקה, כלי זה הנקרה קומפקטיפיקציית סטון-צ'ך שהינה בעצם "בניית" העולם של המספרים הטבעיים בצורה קצת חדשה כדי למצוא איבר המקיים את התכונה הנדרשת.

**1.1 הגדרה(**קבוצת סכומים סופים**)**

יהי קבוצת הסכומים הסופיים מעל B הינה:

**1.2 הגדרה**(IP-set)

יהי *, יקרא* IP-set *אם ורק אם קיים אינסופי כך ש-.*

**1.3 משפט(**הינדמן**)**

אם

אזי לפחות אחד הקבוצות הינה *IP-set*.

**2 אולטרה פילטר**

בפרק זה נסקור את הכלים המרכזיים להוכחת משפט הינדמן, שהם האולטרה-פילטר שממנו נבנה את המרחב שבו מתייקמת קומפקטיפיקציית סטון-צ'ך עבור המספרים הטבעיים.

**2.1 הגדרה (**פילטר):

יהי קבוצה ויהי אוסף לא ריק של תת קבוצות של , הוא **פילטר** (filter) על , אם ורק אם:

1. לכל , .
2. אם אזי
3. אם וגם אזי .

**2.2 הגדרה** – בסיס של פילטר:

*יהי פילטר על* **,** תת-אוסף הוא **בסיס** של הפילטר , אם ורק אם לכל קיים כך ש- .

אוסף הוא **בסיס-פילטר***(*filter base*) על , אם ורק אם קיים פילטר על אשר הוא הבסיס שלו.*

**2.3 משפט**

אוסף של תת-קבוצות של קבוצה הוא בסיס-פילטר על , *אם ורק אם הוא אוסף* ***לא ריק*** *של קבוצות* ***לא ריקות****, ולכל יש כך ש-* .

הוכחה:

**כיוון אחד:** נניח ש-הוא בסיס-פילטר על ויהי הפילטר על אשר בסיס שלו. , לכן יש  *כך ש- ומכאן ש- .  
 לכן כל מקיימת .  
אם אזי , לכן ומכך ש- הוא בסיס של נובע: יש כך ש-.*

***כיוון שני:*** *יהי אוסף העונה על דרישות המשפט. נסמן ב- את אוסף הקבוצות המכילות איזשהו איבר של .  
נוכיח ש- הוא פילטר (ואז הוא הבסיס שלו)  
 ו- . לכן .*

1. *לכל יש כך ש-. , לכן .*
2. *תהיינה . יש כך ש- . לכן . ב- יש כך ש-. לכן . ולכן על פי הגדרת , .*
3. *תהי ותהי . יש כך ש-. לכן בודאי ומכאן ש .*

*מש"ל.*

**2.4 הגדרה** – אולטרה-פילטר(ultra filter):

פילטר על קבוצה הוא אולטרה-פילטר אם ורק אם אין שום פילטר על המכיל ממש את .

ניתן להגיד אם כן כי אולטרה-פילטר הוא פילטר מקסימלי.

***2.5 טענה***

*יהי פילטר על , אולטרה פילטר על אם ורק אם לכל בדיוק אחת מבין שייכת ל .*

*הוכחה:*

***כוון אחד****: נניח כי אולטרה פילטר, ותהי . ברור שלכל היותר אחת מבין שייכת לכי אילו שתיהן היו ב היה מתקיים*  אבל .

כדי להוכיח שלפחות אחת בשתיהן שייכת ל, נסתכל בשני האוספים האלה:

*אם וגם אזי יש כך ש-*  ויש כך ש .

*וגם לכן* וזה לא יתכן כי (ובפילטר אין קבוצות ריקות).

לפיכך לפחות לאחד מבין האוספים , *אינה שייכת.*

*נאמר ללא הגבלת כלליות ,*

*ו- לכן .*(\*)

הוא, אם כן, אוסף לא ריק, של קבוצות לא ריקות, וברור שהחיתוך של כל שתי קבוצות מתוכו נמצא בו. לפי משפט 2.3 הוא בסיס של פילטר שיסומן .

כי אם אזי לכן (כי ).

הוא אולטרה פילטר, לכן מכך ש- נובע כי .

מ(\*) נקבל כי *, ולכן .*

***כוון שני:*** *נניח שלכל אחת מבין נמצאת ב* *.*

*אילו היה פילטר , המכיל ממש את היתה קיימת קבוצה , כך ש , וגם . לפי ההנחה, מכך ש- נובע , ומאחר ש אזי . זה לא יתכן כי גם אולם . ולכן אולטרה פילטר.*

**2.6 טענה**

תהי ונסמן ב- את הפילטר . אזי  *הינו אולטרה פילטר אם ורק אם A הינו סינגלטון.*

*הוכחה:*

***כיוון אחד****: נניח ש- . אזי . יהי איזשהו פילטר על שעבורו ונוכיח ש- .*

*תהי . אם אזי , לכן .*

*מאחר ש- . לפיכך וזה לא יתכן. לפכיך לכל מתקיים , לכן , ומכאן ש- .*

*הראינו ששום פילטר על אינו מכיל ממש את , לכן הוא אולטרה פילטר.*

***הכיוון האחר****: נניח ש-A אינה סינגלטון, נבחר ונסתכל בפילטר*

*אם אזי לכן , לכן .*

*הוכחנו אם כן, .*

*יתר על כן: אבל*  (כי  *)*

*לכן* .

לפיכך אינה אולטרה פילטר.

**2.7 הגדרה** – אולטרה-פילטר ראשי(principal ultra filter):

יהי ***,*** *האולטרה פילטר*

יקרא אולטרה-פילטר - ראשי.

**2.8 טענה**

יהי אולטרה-פילטר **שאינו ראשי** על , ויהי , אזי  *אינסופי.*

*הוכחה:*

*נוכיח באינדוקציה על , שלכל טבעי, אין בקבוצות בנות אברים.*

*עבור אזי אם אזי אם נרי שנקבל כי ואז הוא ראשי בניגוד להנחה. אם כן עבור הטענה נכונה.*

*נניח נכונות עבור ונוכיח עבור .*

אינו ראשי וכן הוא אולטרה פילטר ולכן לפי 2.6  *אחרת היה ראשי.* ולכן קיים וקיים כך ש- . אבל מצד שני  *פילטר ולכן . אבל מכך ש- אזי ולכן הנחת האינדוקציה תקפה עבור .*

*ולכן קיים כך ש- , בסתירה לכך ש אינו סינגלטון. ולכן הנחת השלילה שגויה.*

*ולכן אינסופית.*

***2.9 משפט***

*כל פילטר על מוכל באולטרה-פילטר על .*

*הוכחה:*

*יהי פילטר על ונסתכל במשפחה של כל הפילטרים על , המכילים את .*

*(). סדורה חלקית על-ידי יחס ההכלה.*

*תהי*  שרשרת מתוך , דהיינו משפחה לא ריקה של פילטרים המכילים את , שהיא סדורה לינארית על ידי ההכלה.

יהי *.*

*נוכיח ש- הוא חסם מלעיל של . ב- . ברור שלכל* , לכן, כל שעלינו להראות הוא ש- הוא פילטר המכיל את .

אכן, אינו ריק( אינה ריקה ולכל אינו ריק כי הוא פילטר). כמו כן,

1. לכל יש כך ש- ולכן .
2. אם אזי יש שעבורו ויש שעבורו . אחד מבין מכיל את האחר(כי  *שרשרת* ). אותו אחד מכיל הן את הן את לכן הוא מכיל את ולכן .
3. אם אז יש , כך ש . לכן אם אז ולכן .   
   לפיכך הוא פילטר. כי לכל .

*מאחר שלכל שרשרת ב- יש חסם מלעיל, הרי שלפי הלמה של צורן יש במשפחה איבר מקסימלי. נראה שאיבר כזה הוא אולטרה פילטר על , המכיל את .*

*יהי איבר מקסימלי של . מכך ש- נובע ש- הוא פילטר המכיל את . נוכיח ש- הוא אולטרה פילטר: אם אזי , לכן . מן המקסימליות של ב- נובע אפוא:*  . מש"ל.

***2.10 הגדרה – התכנסות פילטר***

*יהי*  פילטר על העולם של מרחב טופולוגי ותהי נאמר שהפילטר **מתכנס** ל במרחב ושהנקודה היא **גבול** של אם ורק אם מכיל את פילטר הסביבות (כלומר אם ורק אם כל סביבה של שייכת לפילטר). כאשר מתכנס ל נרשום

***2.11 משפט***

*מרחב טופולוגי הוא מרחב האוסדורף אם ורק אם לכל פילטר מתכנס על יש גבול יחיד.*

*הוכחה:*

***כיוון אחד:*** *נניח ש- הוא מרחב האוסדורף ויהי פילטר על המקיים וגם .*

*פירושו , פירושו .  
לפיכך אם הן איזשהן סביבות של בהתאמה, אז , לכן ומכאן ש- . מכך נובע, שבהכרח שכן במרחב האוסדורף לכל שתי נקודות שונות יש סביבות שונות זרות.*

***כיוון שני:*** *נניח שלכל פילטר מתכנס על יש גבול יחיד. תהיינה נקודות שונות ב-, ונניח בשלילה שאין להן סביבות זרות. אז לכל ולכל , , ואז לפי משפט(*לפי 2.3*), האוסף*  הוא בסיס פילטר על .  
יהי הפילטר שקובע , מכיל את (כי ולכל , ). מכיל גם את (מאותו נימוק). לכן . לפיכך וגם והגענו לסתירה. לכן, לכל יש סביבות שעבורן *,* כלומר הוא מרחב האוסדורף.

***2.12 משפט***

*התאמה רציפה בנקודה , אם ורק אם לכל פילטר על המקיים פילטר התמונה, , שהוא הפילטר על שבסיסו הוא אוסף הקבוצות מהטיפוס כאשר , מקיים*

*הוכחה:*

***כיוון אחד:*** *נניח ש- רציפה ב- ויהי פילטר על המקיים .  
תהי סביבה של ב-.  
בשל הרציפות של ב- קיימת סביבה של ב- כך ש-. (כי ) לכן שייכת לפילטר התמונה , ולכן . בזאת הוכח שב-,*  לכן .

**הכיוון האחר:** *נניח שכל אימת ש , . מאחר ש-* , הרי ש  
 . פירוש הדבר הוא שכל סביבה של מכילה את התמונה של איזושהי סביבה של . לכן רציפה ב-.

**2.13 משפט**

יהי מרחב טופולוגי: הטענות שלהלן שקולות זו לזו.

1. קומפקטי.
2. לכל משפחה של קבוצות **סגורות**, שהיא בעלת תכונת החיתוך הסופי, מתקיים .
3. כל אולטרה-פילטר על - מתכנס.

**הוכחה**

*: תהי משפחה בעלת תכונת החיתוך הסופי, של קבוצות סגורות במרחב קומפקטי (ונוכיח ). נניח בשלילה ש-.*

*אזי*

*האוסף הוא אפוא כיסוי פתוח של .*

*מן הקומפקטיות של נובע שלכיסוי הזה יש תת-כיסוי סופי, נאמר:*

*אבל מכך נובע:*

בספירה לכך שהמשפחה היא בעלת תכונת החיתוך הסופי.

: יהי אולטרה פילטר על (ונוכיח שהוא מתכנס). נסתכל במשפחת הקבוצות הסגורות:

משפחה זו היא בעלת תכונת החיתוך הסופי, שכן אם ב-, אזי (חיתוך סופי של קבוצות מתוך פילטר, שייך לפילטר, ובפילטר אין קבוצות ריקות).

לכן: .

לפיכך, על פי ההנחה 2, .

תהי (ונוכיח ש- ).

אם סביבה של , אז, מאחר שלכל , , אנו מקבלים: לכל , . מכך נובע שהאוסף *, הוא בסיס-פילטר על . יהי הפילטר אשר בסיסו. הפילטר*  מכיל את הפילטר (כי אם אז, מאחר ש- היא סביבה של מתקיים , כלומר ). מאחר ש-אולטרה פילטר, בהכרח מתקיים: . אבל הפילטר , מצידו, מכיל כל סביבה של (כי ולכן לכל , ). לפיכך .עצמו מכיל כל סביבה של ופירוש הדבר הוא.

: בהנחה שכל אולטרה פילטר על מתכנס, נוכיח ש- קומפקטי.

נניח בשלילה ש – הוא כיסוי פתוח של ,שאין לא תת-כיסוי סופי. לכל אוסף סופי לא ריק, , (אחרת היה תת-כיסוי סופי של ). משפחת הקבוצות מהטיפוס היא בסיס-פילטר (היא אינה ריקה,כל הקבוצות בה אינן קירות והחיתוך של כל שתי קבוצות מטיפוס זה הוא קבוצה מאותו טיפוס). כל פילטר מוכל באולטרה פילטר, לפיכך קיים אולטרה פילטר על המכיל את כל הקבוצות מטיפוס זה. על פי ההנחה 3, קיים כך ש-.

בכיסוי הפתוח קיימת קבוצה כך ש-. היא סביבה של ולכן . אבל על פי הגדרת , גם *, וזה לא יתכן כי מכך ש- בעוד ש , ובפילטר אין קבוצות ריקות.*

***2.14 טענה***

מרחב קומפקטי אם ורק אם מתקיים שלכל משפחה  *של קבוצות* ***סגורות*** *ב**, שהיא בעלת תכונת החיתוך הסופי מתקיים: .*

**2.15 הגדרה**(קומפקטיפיקציה)

**קומפקטיפיקציה**(compactification)של מרחב טופולוגי היא זוג סדור , שבו הוא מרחב קומפקטי ו- הוא שיכון של כתת קבוצה צפופה ב, כלומר הוא הומאומורפיזם מ*לתוך ו .*

***2.16הגדרה****(קומפקטיפציית סטון-צ'ך,* Stone-Cech compactification*)*

קומפקטיפיקצית סטון-צ'ך היא קומפקטיפיקציה של כאשר הינו מרחב האוסדורף קומפקטי, כך שמתקיים שלכל התאמה רציפה כאשר מרחב האוסדורף קומפקטי, קיימת התאמה רציפה **יחידה** כך ש- הינה הרחבה של *.*

**3 בניית**  *- קומפקטיפיקציית סטון-צ'ך*

*כאן בעזרת הכלי מהפרק הקודם אנו בונים את הכלי הבא המרכזי להוכחה של הינדמן, וזהו מרחב שעולמו הוא אולטרה פילטרים, שבו נוכל לשכן את המרחב המקורי שלנו.*

**3.1 הגדרה**

יהי מרחב דיסקרטי נגדיר את המרחב

**3.2 הגדרה**

יהי נסמן:

**3.3 למה**

ההתאמה *, מהווה שיכון של קבוצות עם סדר חלקי תחת . ובפרט:*

1. *.*
2. *אם אזי .*
3. *וגם .*
4. *. ()*
5. *ההתאמה , הינה חד חד ערכית.*

***הוכחה:***

1. נוכיח כי   
   ברור כי .  
   יהי , אולטרה פילטר כל שהוא, בתור אולטרה פילטר על , אזי ולכן , ולכן , ולכן .  
   נוכיח כי   
   לכל אולטרה פילטר מתקיים , ולכן **אין** איברים ב המכילים את ולכן קיבלנו כי
2. נניח כי   
   ויהי אזי אבל וכן אולטרה פילטר ולכן ולכן . מש"ל
3. נוכיח

יהי אזי , אולטרה פילטר ולכן וגם  
 ואם כן קיבלנו כי ולכן וכן ולכן .

ולכן קיבלנו כי וגם . וממילא קיבלנו כי .

נוכיח

יהי ולכן וגם ולכן וכן ובגלל ש אולטרה פילטר אזי וממילא נקבל כי

נוכיח

נניח בשלילה כי קיים כך ש ולכן וגם ולכן וגם

אבל אולטרה פילטר ולכן וגם מצד שני ולכן

אולטרה פילטר ולכן , אך מצד שני(כפי שראינו) וגם וזה בסתירה להיות אולטרה פילטר.

נוכיח

יהי ולכן או ללא הגבלת כלליות נניח כי ולכן והיות אולטרה פילטר נובע כי . ולכן קיבלנו כי ולכן .

המקרה השני הינו אותו דבר עד כדי שינוי אותיות A וB.

ולכן קיבלנו כי.

1. אם"ם אם"ם(אולטרה פילטר) אם"ם אם"ם
2. נניח כי קבוצות שונות של   
    שונות ולכן ללא הגבלת כלליות(המקרה השני דומה עד שינוי סימנים) קיים כך ש ולכן ולכן נקבל כי (לפי סעיף 2)  
   מצד שני לפי סעיף 4. אבל ברור כי . ולכן נקבל כי

**3.4 הגדרה(**טופולוגיה על **)**

יהי נגדיר אוסף כך:

הבסיס לטופלוגיה על יוגדר על ידי קבוצת התת קבוצות

**3.4 טענה**

יהי אזי

ו- הינה סינגלטון ב- . *כלומר, הקבוצה היא סינגלטון* ב- *.*

*הוכחה:*

ולכן ולכן .

יהי אזי , אבל אולטרה פילטר ו- קבוצה סופית ולכן לפי 2.8 נקבל כי הינה ראשית ונקבל כי .

ולכן קיבלנו כי *.*

*וממילא קיבלנו כי*

*והיות ו הינו האבר היחיד ב הרי שמדובר בסינגל טון.*

**3.6 משפט**

התת-קבוצות מהוות בסיס עבור טופולוגיה על וביחס לטופולוגיה זו ההתאמה  *כך ש-, משכנת את כמרחב דיסקרטי וצפוף ב-, ולכן ההגבלה של ל הינה הומיאומורפיזם.*

***הוכחה:***

*נסמן* . נראה כי מהווה בסיס עבור טופולוגיה על *.*

1. *יהי   
   נתבונן ב- אזי לפי למה 3.4 הרי ש- ולכן וכן .*
2. *תהאנה ונניח כי   
   אזי היות ו הרי שקיימים כך ש   
   ולכן   
     
   ולכן מצאנו כי כך ש- .*

*מקיום שני תנאים אלה לפי 2.10 בספר – קיימת טופולוגיה יחידה על ש בסיס שלה.*

*נוכיח כי* ההתאמה  *כך ש-, משכנת את כמרחב דיסקרטי וצפוף ב-*

*ההתאמה , כך ש- . הינה חח"ע – כי עבור מתקיים:*

והיות ומתוך הגדרת הטופולוגיה על נובע כי הסינגלטונים- הינם קבוצות פתוחות. ולכן נקבל כי התמונה של תחת הינה דיסקרטית.

נוכיח צפיפות( צפופה ב- ) –

נוכיח כי פוגשת כל קבוצה בבסיס של הטופולוגיה

אזי יהי . קבוצה פתוחה בבסיס. ולכן קיים . אבל אזי ,  
ולכן קיבלנו כי פוגשת כל קבוצה בבסיס.

ולכן הינה צפופה.

מש"ל.

**3.7 משפט**

יהי מרחב דיסקרטי אזי המרחב הינו קומפטי והאוסדורף. וכן  *הינו קומפקטיפיקציית סטון-צ'ך של .*

*הוכחה:*

*הוכחת האוסדורף-*

*תהיינה נקודות שונות, ז"א הם אולטרה פילטרים שונים.*

*ללא הגבלת כלליות יש עבורה וגם .*

*אזי אם ניקח את אזי .*

*ולכן קיבלנו כי הסביבות הפתוחות של הנקודות בהתאמה, המקיימות .*

*ולכן קיבלנו כי האוסדורף.*

הוכחת קומפקטיות-

יהי משפחה של קבוצות סגורות המקיימות את תכונת החיתוך הסופי.

היות ומתקיים לפי למה 3.3

אזי קיבלנו כי גם ולכן גם המשפחה מקיימת את תכונת החיתוך הסופי.

אם ניקח את האוסף

*היות* הרי ש .

וכן לכל

ולכן קיים

וכן אם וגם אזי  *ולכן גם*

ולכן נקבל כי המשפחה יוצרת פילטר על . נוכל להרחיב את את הפילטר לאולטרה פילטר (כל פילטר מוכל באולטרה פילטר(2.9))

אולטרה פילטר ולכן .

ברור כי לכל מתקיים .

ולכן .

ולכן קיבלנו כי .

ולכן קיבלנו כי לכל המקיים את תכונת החיתוך הסופי מתקיים .

וכן כל קבוצה סגורה ב היא מהצורה  *וכן וזו מהצורה .   
ולכן* לכל משפחה של קבוצות **סגורות**, שהיא בעלת תכונת החיתוך הסופי, מתקיים .

ולכן קומפקטית.

הוכחת קומפקטיפיקציית סטון-צ'ך:

יהי התאמה רציפה כל שהיא, כאשר מרחב קומפקטי האוסדורף.( הינה דיסקרטית ולכן כל התאמה מ הינה רציפה.)

יהי אולטרה פילטר על .

נתבונן ב פילטר התמונה מעל (*שהוא הפילטר על שבסיסו(*2.2*) הוא אוסף הקבוצות מהטיפוס כאשר* ). והיות וקומפקטי כל אולטרה פילטר ב מתכנס לנקודה כלשהיא ב (לפי 2.13).

אם כן נוכל לבנות התאמה

*כך כאשר מקיים .*

*ואם נתבונן בהתאמה*

וכן היות  *(כי מכיל את כל הסביבות של )*

*והיות וf רציפה אזי לפי 2.12 מתקיים:*

ולכן מהגדרת מתקיים

נראה כעת כי רציפה.

יהי ויהי סביבה פתוחה של . ונמצא קבוצה פתוחה כך ש-.

היות ו מרחב רגולרי אזי קיימת סביבה פתוחה של כך שמתקיים

בנוסף הקבוצה הינה קבוצה פתוחה( רציפה) וכן

ולכן ומכאן שזה הרי אומר ש- .

על מנת להראות ש נראה כי כי .

נניח בשלילה כי קיים כך ש .

אזי ולכן .

והיות והקבוצות , זרות נקבל כי:

אבל זה בסתירה לכך שאולטרה פילטר(אינה מכילה את הקבוצה הריקה.)

ולכן הנחת השלילה שגויה. ולכן קיבלנו כי *.*

*ולכן קיבלנו כי רציפה.*

*נוכיח את יחידות ההרחבה*

*אם רציפה המקיימת*

*אזי לכל מתקיים .*

*כלומר לכל מתקיים .*

*אם כן ו מתלכדות על התת קבוצה שהיא צפופה בומאחר ש האוסדורף נובע כי .*

*ומכל האמור קיבלנו כי קומפקטיפיקציית סטון צ'ך מעל . מש"ל.*

**4 הוכחת משפט הינדמן**

על ידי הכלים שבנינו עד כה, נוכל לעבור לבנות את העולם עצמו על בסיס המספרים הטבעיים,

**4.1 הגדרה**

יהי , ויהי .

**4.2 טענת עזר**

א.

ב.

ג. אם אזי .

ד.

*הוכחה:*

א.

ברור כי

צד שני :

אזי אם אזי ברור כי ולכן אבל ולכן גם .

ולכן

מש"ל

ב.

אםם כך ש-

אםם וגם

אםם וגם

אםם

מש"ל

ג.

יהי אזי קיים כך ש אבל ולכן  *וכן ולכן*

*מש"ל*

ד.

*אםם קיים כך ש .*

*אםם אםם*

*אםם .*

מש"ל.

**4.3 הגדרה**

יהי אולטרה פילטר ויהי , נגדיר את הפעולה

במקרה והאולטרה פילטר ברורה מההקשר נסתפק בסימון .

**4.4 טענת עזר**

א.

ב.

ג. תהאנה כך ש- אזי

ד.

ה.

הוכחה:

א.

לכל k מתקיים אבל אולטרה-פילטר מעל ולכן ולכן . וזה מתקיים לכל k ולכן **.**

מש"ל.

ב.

נניח בשלילה כי קיים   
אבל  
  
אבל לכל k *.  
אבל לא קיימים n-ים כאלה ולכן .  
אבל אזי קיבלנו כי ואזי קיבלנו כי אבל אולטרה-פילטר ומהגדרתו . בסתירה  
ולכן לא קיימים k כך ש-ולכן* .מש"ל.

ג.

יהי ונוכיח כי

ולכן .

אבל ולכן

אולטרה פילטר וכן ולכן מהגדרת פילטר מתקיים גם .

ולכן .

ולכן קיבלנו כי .

מש"ל.

ד.

*יהי*

*ולכן*

*אבל*

*וכן*

*אולטרה-פילטר וכן ולכן מהגדרת פילטר מתקיים כי וכן ולכן וגם ולכן .*

*ולכן הוכחנו כי .*

*נוכיח כוון שני יהי*

*ולכן וגם*

*אולטרה פילטר ולכן גם אבל*

ולכן קיבלנו כי גם .

ולכן .

ולכן הוכחנו את ההכלה

ומכל האמור קיבלנו כי

מש"ל.

ה.

**4.5 הגדרה**

תהיינה אולטרה פילטרים על **,** נגדיר את הפעולה להיות אוסף כל התת-קבוצות *שעבורן הקבוצה שייכת לאולטרה פילטר*  , כלומר

**4.6 למה**

תהיינה אולטרה פילטרים על , אזי אולטרה פילטר.

הוכחה:

1. נוכיח כי

אזי צריך להוכיח כי מטענת-עזר-4.4 נובע כי .

אולטרה-פילטר מעל ולכן ולכן   
ולכן

מש"ל.

1. נוכיח כי .

נניח בשלילה כי .  
ולכן מטענת-עזר-4.4 נובע כי .

אבל מההנחה  *ולכן .  
וקיבלנו שלמרות ש אולטרה פילטר בסתירה להגדרת אולטרה פילטר.  
ולכן הנחת השלילה הראשונה גם שגויה ולכן ולכן .  
מש"ל*

1. תהיינה

*ולכן וגם*

*אולטרה פילטר ולכן גם*

*אבל מטענת-עזר-4.4 נובע כי*

*ולכן קיבלנו כי*

*ובפרט שקיבלנו כי . מש"ל.*

1. יהי ויהי כך ש נוכיח כי גם .

במילים אחרות צריך להוכיח כי .

ולכן

*אולטרה פילטר וכן מטענת-עזר-4.4,*

*ולכן נקבל מהגדרת פילטר נקבל כי .*

*ולכן נקבל כי מש"ל.*

מ1,2,3,4 קיבלנו כי פילטר.

נוכיח כי פילטר זה הינו אולטרה פילטר.

*יהי נתבונן ב.*

*נוכיח כי*

*מהנתון כי אזי אבל אולטרה פילטר ולכן ומטענת-עזר-9 נקבל כי*

*ולכן ולכן נקבל כי .*

*ומכל האמור נקבל לפי 2.3 כי אולטרה פילטר.*

*מש"ל.*

*וממילא קיבלנו כי . ולכן קיבלנו כי פעולה בינארית על*  .

**4.7 טענה**(אסוציאטיביות)

לכל מתקיים:

הוכחה:

אםם

אםם

אםם (בהצבה - )

אםם

אםם.

מש"ל.

**4.8 טענה**

תהיינה אולטרה פילטרים ראשיים על , אזי מתקיים

הוכחה:

תהיינה .

אולטרה פילטר(לפי 4.6)

וכן .

ולכן .

האולטרה פילטר היחיד המכיל את הסינגלטון הוא האולטרה פילטר הראשי .

ולכן קיבלנו כי כנדרש.

**4.9 טענה**

ההתאמה (לכל ) היא פונקציה רציפה מ*ל .*

*הוכחה:*

יהי קבוצה פתוחה בסיסית נבחן את המקור של

*נקבל כי*

*אםם . אםם אםם כאשר .*

*וקבלנו כי לכל קבוצה פתוחה המקור גם פתוח.*

*ולכן מדובר על התאמה רציפה. משל*

**4.10 הגדרה**

אולטרה פילטר הוא אידמפוטנטי(Idempotent Ultra-Filter) אם ורק אם מתקיים:

**4.11 משפט**

קיים כך ש- אידמפוטנטי.

ז"א מתקיים:

***טענות עזר עבור משפט 4.7***

*יהי .*

*נגדיר*

*נתבונן באוסף*

*וכן עבור*  ועבור

נגדיר

***טענת עזר 1***

קיים איבר מינימאלי M ל (ביחס ליחס )

**הוכחה:**

יהי שרשרת.

נעיר כי מקיימת את תנאי תכונת החיתוך הסופי בגלל ש הינה שרשרת.

היות ו הינה קומפקטית, () הינה קבוצה לא ריקה וסגורה.

יהיו כך ש

*ותהאנה וברור כי ובגלל ש* הרי שמתקיים

.

קיבלנו כי לכל סגורה(ולא ריקה) ולכל מתקיים ולכן ומתקיים לכל *.*

*ולכן קיבלנו כי כל שרשרת על הינה חסומה מלרע.*

ברור כי . ולכן אינה ריקה.

*ולכן לפי הלמה של צורן(Zorn's Lemma)(מופעל על עם יחס הסדר "בצורה הפוכה" ) קיים לאיבר מיני*מאלי *ז"א קיים כך שלכל מתקיים .*

**טענת עזר 2**

*יהי* M איבר מינימאלי ל ויהי אזי

הוכחה:

נסמן

נראה כי

יהי

אזי מהגדרת קיים כך ש-

אבל וגם , וכן (לפי טענת עזר 1) ולכן

ולכן קיבלנו כי

ולכן *.*

נראה כי

*ברור כי אינה ריקה כי . בנוסף סגורה היות והיא תמונה של קבוצה סגורה על ידי התאמה רציפה(על פי טענה* 4.9*) וסגורה לפי שהיות והיא התאמה ממרחב קומפקטי למרחב האוסדורף ( קומפקטי והאוסדורף). ולכן*

*הרי שקיבלנו כי וגם וממינימאליות של M נקבל כי . מש"ל*

***טענת עזר 3***

*יהי* M איבר מינימאלי ב ויהי

*ונתבונן ב-*

*אזי*

*הוכחה:*

*וכן מטענת עזר 2 מתקיים .*

*ולכן גם .*

*ולכן קיים כך ש -.*

*ולכן מהגדרת S*

*ולכן . מש"ל*

***הוכחת משפט 4.7:***

*יהי .*

*נגדיר*

*נתבונן באוסף*

לפי טענת עזר 1 עבור 4.7 קיים כך ש איבר מינימאלי ב .

*יהי (קיים כזה כי ולכן אינה ריקה). נוכיח כי אידמפוטנטי.*

*לפי טענת עזר 2 אזי*

ניקח אם כן שוב ונתבונן ב

נראה אם כן כי .

מטענת עזר 3 נובע כי .

וכן ברור כי הינה קבוצה סגורה היות ו סגורה

וכן הינה המקור של הנקודה *על ידי התאמה רציפה (על פי טענה* 4.9*).*

תהאנה  *אזי*

*וכן ולכן לפי טענת עזר 2 מתקיים*

*ולכן*  ולכן .

ולכן קיבלנו כי .

ומכל האמור קיבלנו כי *.*

*אבל וממינימאליות של M נקבל כי .*

*אבל היות ו* הרי ש ולכן *.*

*מש"ל.*

**4.10 טענה**

בהינתן ש

ויהי אולטרה פילטר על

אזי קיים .

הוכחה:

נניח בשלילה כי לכל . אזי לפי 2.3 וזה מתקיים לכל .

ולכן נקבל כי מהגדרה 2.1.1(מדובר על חיתוך סופי)

מצד שני מתקיים

בסתירה, ולכן הנחת השלילה שגויה. ולכן קיים . משל.

**4.11 משפט**

יהי אולטרה-פילטר אידמפוטנטי על ℕ,  
אזי לכל  *הינו IP-set.*

*הוכחה:*

*יהי .*

היות ו מקיים אזי אם מתקיים .

נבנה רקורסיבית:

* שרשרת של קבוצות
* סדרה עולה: כאשר , כך ש .

נתחיל עם .

היות ו *. קיים .*

באופן כללי בהינתן וכן *, לפי ההגדרה מתקיים שהקבוצה ולכן וכן כמקודם ולכן גם*  אינסופי כתת קבוצה באולטרה פילטר שאינו ראשי(לפי 2.8), ולכן נבחר כך ש .

נטען את הטענה הבאה:

יהי טבעי  
ותהיינה

*אזי*

נוכיח זאת באינדוקציה על .

היות ומתקיים אזי עבור מתקיים הטענה.

נניח נכונות עבור וכן . ולכן הסכום ה *מקיים:*

*והיות ו- נקבל כי הסכום ה-r . ולכן* מתקיים. והוכחנו את הטענה.

מכל האמור קיבלנו כי קבוצת הסכומים של  *מקיים* כדרוש.

**1.3 הוכחת משפט(**הינדמן**)**

אם

אזי לפחות אחד הקבוצות הינה *IP-set*.

הוכחה:

לפי 4.7 קיים כך ש- אידמפוטנטי.  
לפי 4.10 קיים .  
ולפי 4.11 הינה *IP-set*.

מש"ל.